УДК 517. 95
doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-3

Об одной нелинейной обратной краевой задаче для линеаризованного уравнения Буссинеска шестого порядка с дополнительным интегральным условием

А. С. Фараджев

Азербайджанский государственный педагогический университет,
Баку, Азербайджан
a.farajov@mail.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* Огромное количество математических моделей называют уравнениями типа Буссинеска, поэтому широкий круг уравнений типа Буссинеска шестого порядка привлекает пристальное внимание со стороны исследователей всего мира. *Материалы и методы.* Изучается классическое решение одной нелинейной обратной краевой задачи для линеаризованного уравнения Буссинеска шестого порядка с дополнительным интегральным условием. Один метод основан на применении метода Фурье. Второй метод заключается в применении метода сжатых отображений. *Результаты.* Суть задачи состоит в том, что требуется вместе с решением определить неизвестный коэффициент, зависящий от переменной t при неизвестной функции. Задача рассматривается в прямоугольной области. При решении исходной обратной краевой задачи осуществляется переход от исходной обратной задачи к некоторой вспомогательной обратной задаче. С помощью сжатых отображений доказываются существование и единственность решения вспомогательной задачи. Затем вновь производится переход к исходной обратной задаче, в результате делается вывод о разрешимости исходной обратной задачи. *Выводы.* Предложенные методы нахождения решений обратной задачи могут быть использованы при изучении разрешимости для различных задач математической физики.

Ключевые слова: обратная краевая задача, классическое решение, метод Фурье, уравнения Буссинеска шестого порядка

Для цитирования: Фараджев А. С. Об одной нелинейной обратной краевой задаче для линеаризованного уравнения Буссинеска шестого порядка с дополнительным интегральным условием // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 2. С. 19–30. doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-3

On a nonlinear inverse boundary value problem for linearized sixth-order Boussinesq equation with an additional integral condition

A.S. Farajov

Azerbaijan State Pedagogical University, Baku, Azerbaijan
a.farajov@mail.ru

Abstract. *Background*. A huge number of mathematical models are called Boussinesq equations; therefore, a wide range of sixth-order Boussinesq equations attracts a lot of attention from outside researchers around the world. *Materials and methods*. The research studies the classical solution of one nonlinear inverse boundary value problem for linearized sixth-order Boussinesq equation with an additional integral condition. One method is based on the application of the Fourier method. The second method is to apply the method of compressed mappings. *Results*. The essence of the problem is that together with the solution it is required to determine an unknown coefficient depending on the variable t with an unknown function. The problem is considered in a rectangular area. When solving the original inverse boundary value problem, the transition from the original inverse problem to some auxiliary inverse problem is carried out. The existence and uniqueness of a solution to an auxiliary problem are proved with the help of contracted mappings. Then the transition to the original inverse problem is again made, as a result, a conclusion is made about the solvability of the original inverse problem. *Conclusions*. The proposed methods for finding solutions to the inverse problem can be used in the study of solvability for various problems of mathematical physics.

Keywords: inverse boundary value problem, classical solution, Fourier method, sixth-order Boussinesq equations

For citation: Farajov A.S. On a nonlinear inverse boundary value problem for linearized sixth-order Boussinesq equation with an additional integral condition. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(2):19–30. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-2-3

Введение

Теория обратных задач для дифференциальных уравнений является динамично развивающимся разделом современной науки. Обратные задачи возникают в самых различных областях человеческой деятельности, таких как сейсмология, разведка полезных ископаемых, биология, медицина, контроль качества промышленных изделий и т.д., что ставит их в ряд актуальных проблем современной математики. Наличие в обратных задачах дополнительных неизвестных функций требует, чтобы, помимо граничных условий, естественных для того или иного класса дифференциальных уравнений, задавались также некоторые дополнительные условия переопределения. Основы теории и практики исследования обратных задач математической физики были заложены и развиты в фундаментальных работах выдающихся ученых А. Н. Тихонова, М. М. Лаврентьева, В. К. Иванова и их учеников.

Уравнение Буссинеска – это классическая модель для описания распространения волн малой амплитуды и длинных волн. В последнее время большое внимание уделяется изучению уравнения Буссинеска шестого порядка [1–12].

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах (см., например [13–18]).

В данной статье мы рассматриваем обратную задачу для линеаризованного уравнения Буссинеска шестого порядка с дополнительным интегральным условием.

1. Постановка задачи и ее сведение к эквивалентной задаче

Пусть $D_T=\{(x,t):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le t\le T\}$. Далее, пусть $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$, $h(t)$ – заданные функции, определенные при $x\in[0,1]$, $t\in[0,T]$. Рассмотрим следующую обратную краевую задачу: найти пару $\{u(x,t),\, a(t)\}$ функций $u(x,t)$, $a(t)$, удовлетворяющих уравнению

$$u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)+\beta_1 u_{xxxx}(x,t)-\beta_2 u_{xxxxxx}(x,t)=$$
$$=a(t)u(x,t)+f(x,t)\quad (x,t)\in D_T\,, \tag{1}$$

с начальными условиями:

$$u(x,0)=\varphi(x),\;\; u_t(x,0)=\psi(x)\quad (0\le x\le 1), \tag{2}$$

с граничными условиями:

$$u(0,t)=u_x(1,t)=u_{xx}(0,t)=u_{xxx}(1,t)=u_{xxxx}(0,t)=u_{xxxx}(1,t)=0\;\;(0\le t\le T)\,, \tag{3}$$

с дополнительным интегральным условием:

$$\int_0^1 g(x)u(x,t)dx=h(t)\quad (0\le t\le T), \tag{4}$$

где $\beta_1>0,\;\beta_2>0$ – фиксированные числа.

Введем обозначение:

$$C^{2,6}(D_T)=\{u(x,t):u(x,t)\in C^2(D_T),u_{xxxxxx}(x,t)\in C(D_T)\}.$$

Определение. Пару $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)\in C^{2,6}\left(D_T\right)\cap$ $\cap C^{1,3}\left(D_T\right)$ и $a(t)\in C[0,T]$, удовлетворяющих уравнению (1) в D_T, условию (2) в $[0,1]$ и условиям (3)–(4) в $[0,T]$, назовем классическим решением обратной краевой задачи (1)–(4).

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $f(x,t)\in C\left(D_T\right)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C[0,1]$, $h(t)\in C^2[0,T]$, $h(t)\ne 0\;(0\le t\le T)$, и выполняются условия согласования

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx=h(0),\;\int_0^1 g(x)\psi(x)dx=h'(0)\,.$$

Тогда задача нахождения классического решения задачи (1)–(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x,t)\in C^{2,6}\left(D_T\right)$ и $a(t)\in C[0,T]$ из (1)–(3) и

$$h''(t)-\int_0^1 g(x)u_{xx}(x,t)dxu+\beta_1\int_0^1 g(x)u_{xxxx}(x,t)dx-\beta_2\int_0^1 g(x)u_{xxxxxx}(x,t)dx=$$
$$=a(t)h(t)+\int_0^1 g(x)f(x,t)dx\;(0\le t\le T). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ является классическим решением задачи (1)–(4), причем $u(x,t)\in C^{2,6}(\bar{D}_T)$. Так как $h(t)\in C^2[0,T]$, дифференцируем (4) два раза по t, получаем:

$$\int_0^1 g(x)u_t(x,t)dx = h'(t)\ ,\ \int_0^1 g(x)u_{tt}(x,t)dx = h''(t) \quad (0 \le t \le T). \tag{6}$$

Умножим уравнение (1) на функцию $g(x)$ и интегрируем полученные равенства от 0 до 1 по x, получим:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 g(x)u(x,t)dx - \int_0^1 g(x)u_{xx}(x,t)dxu + \beta_1\int_0^1 g(x)u_{xxxx}(x,t)dx -$$

$$-\beta_2\int_0^1 g(x)u_{xxxxxx}(x,t)dx = a(t)\int_0^1 g(x)u(x,t)dx + \int_0^1 g(x)f(x,t)dx\ (\ 0 \le t \le T). \tag{7}$$

Отсюда с учетом (4) и (6) легко приходим к выполнению (5).

Теперь предположим, что $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (5). Из (5) и (7) имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^1 g(x)u(x,t)dx - h(t)\right) = a(t)\left(\int_0^1 g(x)u(x,t)dx - h(t)\right) \quad (0 \le t \le T). \tag{8}$$

В силу (2) и $\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = h(0)$, $\int_0^1 g(x)\psi(x)dx = h'(0)$ находим:

$$\int_0^1 g(x)u(x,0)dx - h(0) = \int_0^1 g(x)\varphi(x)dx - h(0) = 0\ ,$$

$$\int_0^1 g(x)u_t(0,t)dx - h'(0) = \int_0^1 g(x)\psi(x)dx - h'(0) = 0\ . \tag{9}$$

Из (8) с учетом (9) ясно, что выполняется и условие (4). Теорема доказана.

2. Разрешимость обратной краевой задачи

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t), a(t)\}$ задачи (1)–(3), (5) будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\lambda_k x \quad \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1)\right), \tag{10}$$

где

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \ \ (k = 1, 2, ...)\ ,$$

Тогда, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) получаем:

$$u_k''(t)+(\lambda_k^2+\beta_1\lambda_k^4+\beta_2\lambda_k^6)u_k(t)=F_k(t;u,a)\ \ (0\le t\le T; k=1,2,...), \tag{11}$$

$$u_k(0)=\varphi_k,\ u_k'(0)=\psi_k\ \ (k=1,2,...), \tag{12}$$

где

$$F_k(t;u,p)=a(t)u_k(t)+f_k(t),\quad f_k(t)=\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x\,dx,$$

$$\varphi_k=2\int_0^1\varphi(x)\sin\lambda_k x dx,\quad \psi_k=2\int_0^1\psi(x)\sin\lambda_k x dx\ \ (k=1,2,...).$$

Решая задачу (11)–(12), находим:

$$u_k(t)=\varphi_k\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_k\sin\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\ (k=1,2,...), \tag{13}$$

где $\beta_k=\sqrt{\lambda_k^2+\beta_1\lambda_k^4+\beta_2\lambda_k^6}\ \ (k=1,2,...)$.

После подстановки выражения $u_k(t)$ $(k=1,2,...)$ в (10) для определения компоненты $u(x,t)$ решения задачи (1)–(3), (5) получаем:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\varphi_k\cos\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\psi_k\sin\beta_k t+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u,a)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right\}\sin\lambda_k x. \tag{14}$$

Теперь из (5) с учетом (10) имеем:

$$a(t)=[h(t)]^{-1}\times$$

$$\times\left\{h''(t)-\int_0^1 g(x)f(x,t)dx+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2+\beta_1\lambda_k^4+\beta_2\lambda_k^6)u_k(t)\int_0^1 g(x)\sin\lambda_k x dx\right\}. \tag{15}$$

Для того чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)–(3), (5), подставим выражение (13) в (15):

$$a(t)=[h(t)]^{-1}\left\{h''(t)-\int_0^1 g(x)f(x,t)dx+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^2+\beta_1\lambda_k^4+\beta_2\lambda_k^6)\left[\varphi_k\cos\beta_k t+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\beta_k}\psi_k\sin\beta_k t+\frac{1}{\beta_k}\int_0^t F_k(\tau;u,p)\sin\beta_k(t-\tau)d\tau\right]\int_0^1 g(x)\sin\lambda_k x dx\right\}. \tag{16}$$

Таким образом, решение задачи (1)–(3), (5) сведено к решению системы (14), (16) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)–(3), (5) важную роль играет следующая

Лемма 1. Если $\{u(x,t),a(t)\}$ – любое классическое решение задачи (1)–(3), (5), то функции

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \quad (k=1,2,...)$$

удовлетворяют системе (13) в $[0,T]$.

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ – любое решение задачи (1)–(3), (5). Тогда умножив обе части уравнения (1) на функцию $2\sin\lambda_k x \ \ (k=1,2,...)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$2\int_0^1 u_{tt}(x,t)\sin\lambda_k x dx = \frac{d^2}{dt^2}\left(2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx\right) = u_k''(t) \quad (k=1,2,...),$$

$$2\int_0^1 u_{xx}(x,t)\sin\lambda_k x dx = -\lambda_k^2\left(2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx\right) = -\lambda_k^2 u_k(t) \quad (k=1,2,...),$$

$$2\int_0^1 u_{xxxx}(x,t)\sin\lambda_k x dx = \lambda_k^4\left(2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\right) = \lambda_k^4 u_k(t) \quad (k=1,2,...),$$

$$2\int_0^1 u_{xxxxxx}(x,t)\sin\lambda_k x dx = -\lambda_k^6\left(2\int_0^1 u(x,t)\cos\lambda_k x dx\right) = -\lambda_k^6 u_k(t) \quad (k=1,2,...),$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (11).

Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (12).

Таким образом, $u_k(t) \ (k=1,2,...)$ является решением задачи (11), (12). А отсюда непосредственно следует, что функции $u_k(t) \ (k=1,2,...)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (13). Лемма доказана.

Очевидно, что если $u_k(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx \ (k=1,2,...)$ является решением системы (13), то пара $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\sin\lambda_k x$ и $a(t)$ является решением системы (14), (16).

Из леммы 1 следует, что имеет место следующее

Следствие. Пусть система (14), (16) имеет единственное решение. Тогда задача (1)–(3), (5) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1)–(3), (5) имеет решение, то оно единственно.

Теперь с целью исследования задачи (1)–(3), (5) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^7$ [19] совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \sin \lambda_k x \quad \left(\lambda_k = \frac{\pi}{2}(2k-1) \right),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u) \equiv \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^7 \| u_k(t) \|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

Норма в этом множестве определяется так:

$$\| u(x,t) \|_{B_{2,T}^7} = J(u).$$

2. Через E_T^7 обозначим пространство вектор-функций $\{u(x,t), a(t)\}$ таких, что $u(x,t) \in B_{2,T}^7$, $a(t) \in C[0,T]$. Снабдим это пространство нормой

$$\| z \|_{E_T^7} = \| u(x,t) \|_{B_{2,T}^7} + \| a(t) \|_{C[0,T]}.$$

Очевидно, что $B_{2,T}^7$ и E_T^7 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^7 оператор

$$\Phi(u,a) = \{ \Phi_1(u,a), \Phi_2(u,a) \},$$

где

$$\Phi_1(u,a) = \tilde{u}(x,t) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{u}_k(t) \sin \lambda_k x, \quad \Phi_2(u,a) = \tilde{a}(t),$$

здесь $\tilde{u}_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots$) и $\tilde{a}(t)$ равны соответственно правым частям (13) и (16).

Очевидно, что

$$\varepsilon_1 \lambda_k^3 < \sqrt{\beta_2}\, \lambda_k^3 < \beta_k < \sqrt{1 + \beta_1 + \beta_2}\, \lambda_k^3 \equiv \varepsilon_2 \lambda_k^3 \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^7 \| \tilde{u}_k(t) \|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le 2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^7 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\varepsilon_1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{2\sqrt{T}}{\varepsilon_1} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 | f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\varepsilon_1} T \| a(t) \|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^7 \| u_k(t) \|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (17)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} = \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| h''(t) - \int_0^1 g(x) f(x,t)dx \right\|_{C[0,T]} + \right.$$

$$+ \|g(x)\|_{L_2(0,1)} (1+\beta_1+\beta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{1/2} \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^7 |\varphi_k|)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 |\psi_k|)^2 \right) + \right.$$

$$\left.\left. +\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^4 |f_k(\tau)|)^2 d\tau \right)^{1/2} + T\|a(t)\|_{C[0,T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^7 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (18)$$

Предположим, что данные задачи (1)–(3), (5) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^6[0,1]$, $\varphi^{(7)}(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = \varphi''(0) = \varphi'''(1) =$

$= \varphi^{(4)}(0) = \varphi^{(5)}(1) = \varphi^{(6)}(0) = 0$.

2. $\psi(x) \in C^3[0,1]$, $\psi^{(4)}(x) \in L_2(0,1)$, $\psi(0) = \psi'(1) = \psi''(0) = \psi'''(1) = 0$.

3. $f(x,t), f_x(x,t), f_{xx}(x,t), f_{xxx}(x,t) \in C(D_T)$, $f_{xxxx}(x,t) \in L_2(D_T)$,

$f(0,t) = f_x(1,t) = f_{xx}(0,t) = f_{xxx}(1,t) = 0$ $(0 \le t \le T)$.

4. $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0, g(x) \in C[0,1]$, $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \ne 0$ $(0 \le t \le T)$.

Тогда из (17)–(18) имеем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^7} \le A_1(T) + B_1(T)\|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^7}, \quad (19)$$

$$\|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le A_2(T) + B_2(T)\|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^7}, \quad (20)$$

где

$$A_1(T) = 2\left\|\varphi^{(7)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \frac{2}{\varepsilon_1}\left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \frac{2\sqrt{T}}{\varepsilon_1}\|f_{xxxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)},$$

$$B_1(T) = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon_1} + T\right)T,$$

$$A_2(T) = \left\|[h(t)]^{-1}\right\|_{C[0,T]} \left\{ \left\| h''(t) - \int_0^1 g(x) f(x,t)dx \right\|_{C[0,T]} + \|g(x)\|_{C[0,1]} (1+\beta_1+\beta_2) \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{1/2} \left[\left\|\varphi^{(7)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \left\|\psi^{(4)}(x)\right\|_{L_2(0,1)} + \sqrt{T}\,\|f_{xxxx}(x,t)\|_{L_2(D_T)} \right] \right\},$$

$$B_2(T) = \left\| [h(t)]^{-1} \right\|_{C[0,T]} \|g(x)\|_{L_2(0,1)} (1+\beta_1+\beta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} T.$$

Из неравенств (19)–(20) заключаем:

$$\|\tilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^7} + \|\tilde{a}(t)\|_{C[0,T]} \le A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^{7,4}}, \qquad (21)$$

где

$$A(T) = A_1(T) + A_2(T),\ B(T) = B_1(T) + B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–4 и

$$(A(T)+2)^2 B(T) < 1. \qquad (22)$$

Тогда задача (1)–(3), (5) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^7} \le R = A(T)+2)$ пространства E_T^7 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^7 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \qquad (23)$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)$ $(i=1,2)$, оператора $\Phi(u,a)$ определены правыми частями уравнений (14) и (16) .

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^7. Аналогично (21) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^7} \le A(T) + B(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x,t)\|_{B_{2,T}^7}, \qquad (24)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^7} \le B(T) R \left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x,t) - u_2(x,t)\|_{B_{2,T}^{7,4}} \right). \qquad (25)$$

Тогда, из оценок (24), (25) с учетом (22) следует, что оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K = K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является в шаре $K = K_R$ единственным решением уравнения (23), т.е. $\{u, a\}$ является в шаре $K = K_R$ единственным решением системы (14) и (16) .

Функция $u(x,t)$ как элемент пространства $B_{2,T}^7$ имеет непрерывные производные $u(x,t)$, $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$, $u_{xxx}(x,t)$, $u_{xxxx}(x,t)$, $u_{xxxxx}(x,t)$, $u_{xxxxxx}(x,t)$ в $\bar{D}_T$.

Из (11) нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k \|u_k''(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le (1+\beta_1+\beta_2) \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^7 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\left\| \left\| f_x(x,t)+a(t)u_x(x,t)+b(t)u_{tx}(x,t) \right\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$ непрерывна в $\bar{D}_T$.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (5) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)–(3), (5), причем в силу следствие леммы 1 оно единственное в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью теоремы 1 доказывается следующая

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2 и

$$\int_0^1 g(x)\varphi(x)dx = h(0), \int_0^1 g(x)\psi(x)dx = h'(0).$$

Тогда задача (1)–(4) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E_T^7} \le R = A(T)+2)$ из E_T^7 единственное классическое решение.

Список литературы

1. Schneider G., Eugene C. W. Kawahara dynamics in dispersive media // Physica D Nonlinear Phenomena. 2001. Vol. 152. P. 384–394.
2. Taskesen H., Polat N. Global existence for a double dispersive sixth order Boussinesq equation // Contemporary Analysis and Applied Mathematics (CAAM). 2013. Vol. 1, № 1. P. 60–69.
3. Wang Y. Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016, № 64. P. 1–16.
4. Xu R., Liu Y., Liu B. The Cauchy problem for a class of the multidimensional Boussinesq-type equation // Fuel and Energy Abstracts. 2011. Vol. 74. P. 2425–2437.
5. Фараджев А. С. Задача для уравнения Буссинеска шестого порядка с двойной дисперсией и нелокальными интегральными условиями // Proceedings of IAM. 2021. Т. 10, № 2. С. 135–148.
6. Фараджев А. С. Об одной краевой задаче для дифференциального уравнения с частными производными шестого порядка с нелокальными условиями // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVI Международной науч.-техн. конф. (г. Пенза, 1–4 декабря 2021). Пенза, 2021. С. 57–63.
7. Polat N., Erta A. Existence and blow up of solution of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009. Vol. 349. P. 10–20.
8. Lin Q., Wu Y. H., Loxton R. On the Cauchy problem for a generalized Boussinesq equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2009. Vol. 353. P. 186–195.
9. Esfahani A., Farah L. Local well-posedness for the sixth-order Boussinesq equation // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2012. Vol. 385. P. 230–242.
10. Wang Y. Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016, № 64. P. 1–16.
11. Wang H. W., Esfahani A. Global rough solutions to the sixth-order Boussinesq equation // Nonlinear Analysis. 2014. Vol. 102. P. 97–104.

12. Sevdimaliyev Yu. M., Mehraliyev Ya. T., Ramazanova A. T., Matanova K. An inverse boundary value problem for the equation of flexural vibrations of a bar // Tran. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mechanics. 2019. Vol. 39 (8). P. 48–55.
13. Farajov A. S. On a solvability of the nonlinear inverse boundary value problem for the boussinesq equation // Advanced Mathematical Models & Applications. 2022. Vol. 7, № 2. P. 241–248.
14. Фараджев А. С. Об одной нелокальной обратной краевой задаче для уравнения Буссинеска шестого порядка с нелокальными интегральными по времени условиями второго рода // Прикладная математика & Физика. 2022. Т. 54, № 3. С. 141–153.
15. Фараджев А. С. Об одной нелокальной обратной краевой задачи для уравнения с частными производными шестого порядка с дополнительными интегральными условиями // Аналитические и численные методы моделирования естественно-научных и социальных проблем : сб. ст. по материалам XVII Всерос. с межд. участием науч.-техн. конф. (г. Пенза, Россия, 28 ноября – 3 декабря 2022 г.). Пенза, 2022. С. 75–78.
16. Farajov A. S. The inverse problem of simultaneous determination two time-dependent coefficients in the equation of motion of waves with surface stress // Tran. Natl. Acad. Sci. Azerb. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences. Mechanics. 2022. Vol. 42 (8). P. 36–46.
17. Farajov A. S., Inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance // News of Baku University. Series of Physico-Mathematical Sciences. 2021. № 3. P. 16–27.
18. He Yang. An inverse problem for the sixth-order linear boussinesq-type equation // UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics. 2020. Vol. 82, iss. 2. P. 27–36.
19. Худавердиев К. И., Велиев А. А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку, 2010. 168 с.

References

1. Schneider G., Eugene C.W. Kawahara dynamics in dispersive media. *Physica D Nonlinear Phenomena*. 2001;152:384–394.
2. Taskesen H., Polat N. Global existence for a double dispersive sixth order Boussinesq equation. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics (CAAM)*. 2013;1(1):60–69.
3. Wang Y. Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2016;2016(64):1–16.
4. Xu R., Liu Y., Liu B. The Cauchy problem for a class of the multidimensional Boussinesq-type equation . *Fuel and Energy Abstracts*. 2011;74:2425–2437.
5. Faradzhev A.S. Problem for the sixth-order Boussinesq equation with double dispersion and nonlocal integral conditions. *Proceedings of IAM*. 2021;10(2):135–148. (In Russ.)
6. Faradzhev A.S. On a boundary value problem for a sixth-order partial differential equation with nonlocal conditions. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: sb. st. po materialam XVI Mezhdunarodnoy nauch.-tekhn. konf. (g. Penza, 1–4 dekabrya 2021) = Analytical and numerical methods for modeling natural science and social problems: proceedings of the 16th International scientific and practical conference (Penza, December 1-4, 2021).* Penza, 2021:57–63. (In Russ.)
7. Polat N., Erta A. Existence and blow up of solution of Cauchy problem for the generalized damped multidimensional Boussinesq equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2009;349:10–20.
8. Lin Q., Wu Y.H., Loxton R. On the Cauchy problem for a generalized Boussinesq equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2009;353:186–195.

9. Esfahani A., Farah L. Local well-posedness for the sixth-order Boussinesq equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2012;385:230–242.
10. Wang Y. Cauchy problem for the sixth-order damped multidimensional Boussinesq equation. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2016;2016(64):1–16.
11. Wang H.W., Esfahani A. Global rough solutions to the sixth-order Boussinesq equation. *Nonlinear Analysis*. 2014;102:97–104.
12. Sevdimaliyev Yu.M., Mehraliyev Ya.T., Ramazanova A.T., Matanova K. An inverse boundary value problem for the equation of flexural vibrations of a bar. *Tran. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mechanics*. 2019;39(8):48–55.
13. Farajov A.S. On a solvability of the nonlinear inverse boundary value problem for the boussinesq equation. *Advanced Mathematical Models & Applications*. 2022;7(2):241–248.
14. Faradzhev A.S. On a nonlocal inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with nonlocal time-integral conditions of the second kind. *Prikladnaya matematika & Fizika*. 2022;54(3):141–153. (In Russ.)
15. Faradzhev A.S. On a nonlocal inverse boundary value problem for a sixth-order partial differential equation with additional integral conditions. *Analiticheskie i chislennye metody modelirovaniya estestvenno-nauchnykh i sotsial'nykh problem: sb. st. po materialam XVII Vseros. s mezhd. uchastiem nauch.-tekhn. konf. (g. Penza, Rossiya, 28 noyabrya – 3 dekabrya 2022 g.) = Analytical and numerical methods for modeling natural science and social problems: proceedings of the 17th All-Russian scientific and engineering conference with international participation*. Penza, 2022:75–78. (In Russ.)
16. Farajov A.S. The inverse problem of simultaneous determination two time-dependent coefficients in the equation of motion of waves with surface stress. *Tran. Natl. Acad. Sci. Azerb. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences. Mechanics*. 2022;42(8):36–46.
17. Farajov A.S., Inverse boundary value problem for the sixth-order Boussinesq equation with double variance. *News of Baku University. Series of Physico-Mathematical Sciences*. 2021;(3):16–27.
18. He Yang. An inverse problem for the sixth-order linear boussinesq-type equation. *UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics*. 2020;82(2):27–36.
19. Khudaverdiev K.I., Veliev A.A. *Issledovanie odnomernoy smeshannoy zadachi dlya odnogo klassa psevdogiperbolicheskikh uravneniy tret'ego poryadka s nelineynoy operatornoy pravoy chast'yu = Study of a one-dimensional mixed problem for a class of pseudohyperbolic equations of the third order with a nonlinear operator right-hand side.* Baku, 2010:168. (In Russ.)

Информация об авторах / Information about the authors

Араз Саламулла оглы Фараджев
кандидат физико-математических наук, доцент, декан математического факультета, Азербайджанский государственный педагогический университет (Азербайджан, г. Баку, ул. Узеира Гаджибекова, 68)

Araz Salamulla Farajov
Candidate of physical and mathematical sciences, associate professor, dean of the faculty of mathematics, Azerbaijan State Pedagogical University (68 Uzeira Gadzhibekova street, Baku, Azerbaijan)

E-mail: a.farajov@mail.ru

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests.

Поступила в редакцию / Received 06.03.2023

Поступила после рецензирования и доработки / Revised 10.04.2023

Принята к публикации / Accepted 29.05.2023